BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

О ПОТЕРЕ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г.Д.ШУКЮРОВА (Джабраилова)

Бакинский Государственный Университет

В работе рассмотрена задача Коши для абстрактных гиперболических уравнений с квазиэллиптической частью, когда некоторые коэффициенты – сингулярны, а некоторые коэффициенты – гладкие функции. Получена энергетическая оценка для решений. В энергетическом неравенстве потери гладкости решений могут происходить по части переменных.

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения второго порядка:

$$\ddot{u} - a(t)u_{xx} = f(t), \;\; 0 \le t \le T, \quad x \in R, \tag{1}$$

$$u(o,x) = u_0(x), \;\; \dot{u}(o,x) = u_1(x), \;\; x \in R. \tag{2}$$

Известно (см.[1],[2]), что если $a(t) \in L[0,T]$, т.е. $a(t)$ удовлетворяет условию Липшица, то при любых $u_0(x) \in H^{s+1}(R_0)$, $u_1(x) \in H^s(R)$, $f(\cdot) \in L_1(0,T;H^s(R))$ задача (1),(2) имеет единственное решение $u(\cdot) \in C([0,T];H^{s+1}(R)) \cap C^1([0,T];H^s(R_0))$ и для $u(t,x)$ верна энергетическая оценка:

$$\begin{aligned} &\|\dot{u}(t,x)\|^2_{H^s(R)} + \|u(t,x)\|^2_{H^{s+1}(R)} \le \\ &\le c[\|u_1(x)\|^2_{H^s(R)} + \|u_0(x)\|^2_{H^{s+1}(R)} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{H^s(R)} d\tau]. \end{aligned} \tag{3}$$

В работе [3] доказано, что данный результат справедлив, даже когда $a(t) \in BV[0,T]$, где $BV[0,T]$ - пространство функций с ограниченной вариацией. В дальнейшем аналогичный результат был получен для более общего класса линейных и квазилинейных гиперболических уравнений [4].

В работе F.Colombini, E.De Giorge, Spagnolos [5] приведен пример, когда $f(t,x) = 0$, а $a(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0,1)$. Они доказали, что соответствующее уравнение не имеет даже локально-суммируемого решения.

Через $LL_\omega[0,T]$ обозначим класс функций $a(t)$, удовлетворяющих следующему условию

$$|a(t+\tau) - a(t)| \le M_a |\tau| \cdot |\log|\tau|| \omega(\tau),$$

где $M_a > 0$, $t, t+\tau \in [0,T]$, $\omega(\xi)$ - ограниченная функция на $[0,T]$ и, монотонно убывая, стремится к нулю при $\xi \to +0$. (4)

Очевидно, что если $a(\cdot) \in LL_\omega[0,T]$, то коэффициент Липшица $L_a = M_a |\log|\tau||\omega(\tau)$ может неограниченно возрастать. Если $a(t) \in LL_\omega[0,T]$, то такие коэффициенты мы будем называть сингулярными.

В работе M.Cicognani, F.Colombini [6] доказано, что если $a(t) \in LL_\omega[0,T]$, то для решения задачи (1),(2) справедлива следующая оценка:

$$\|\dot{u}(t,\cdot)\|_{H^s(R)} + \|u(t,\cdot)\|_{H^{s+1}(R)} \le c\left\{\|u_1(\cdot)\|_{H^{s+\delta}(R)} + \|u_0(\cdot)\|_{H^{s+1+\delta}(R)}\right\}$$

где δ-произвольное положительное число. Другими словами, в этом случае по переменному x может теряться гладкость решения задачи (1),(2).

В данной работе рассмотрена задача Коши для абстрактных гиперболических уравнений с квазиэллиптической частью, когда некоторые коэффициенты сингулярны, т.е. из класса $LL_\omega[0,T]$, а некоторые коэффициенты – гладкие функции, т.е. из $L[0,T]$.

Через $H^s_\delta(R_{n+m})$ обозначим следующий класс функций:

$$H^s_\delta(R_{n+m}) = \left\{ u = u(x,y),\ x \in R_n, y \in R_m,\ D^\delta_x u \in H^s(R_{n+m}) \right\} \qquad (5)$$

где D^δ_x - производная порядка δ по переменным x. В $H^s_\delta(R_{n+m})$ введем норму следующим образом:

$$\|u\|_{H^s_\delta(R_{n+m})} = \left\{ \int_{R_{n+m}} \left(1+|\xi|^2\right)^\delta \left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^s |\hat{u}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\xi \in R_n$, $\eta \in R_m$, $\hat{u}(\xi,\eta) = F[u(x,y)]$ –преобразование Фурье по переменным x и y.

Рассмотрим задачу Коши :

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{u} + (-1)^k a(t)\Delta^k_x u + (-1)^l b(t)\Delta^l_y u = f(t,x,y), \\ u(0,x,y) = u_0(x,y), \quad u_t(o,x,y) = u_1(x,y), \end{array}\right\} \qquad (6)$$

где $t \in [0,T]$, $x \in R_n$, $y \in R_m$, $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\Delta_y = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$, а функции $a(t)$, $b(t)$ и $f(t,x,y)$ удовлетворяют следующим условиям :

1^0. $a(t) \in LL_\omega[0,T]$, где $\omega(\lambda)$ удовлетворяет условию (4) и

$$\lim_{x\to\infty} \log \lambda\omega(\lambda^{-1}) = \infty . \qquad (7)$$

2^0. $b(t) \in L[0,T]$.

3^0. $f(t,x,y) \in L_1(0,T; H^s_\delta(R_{n+m}))$.

Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $1^0 - 3^0$. *Тогда для решения задачи (1),(2) справедлива следующая оценка:*

$$\|\dot{u}\|_{H^s(R_{n+m})}+\left\|\nabla_x^k u\right\|_{H^s(R_{n+m})}+\left\|\nabla_y^l\right\|_{H^s(R_{n+m})}\le$$
$$\le c_\delta\Bigg[\left\|u_1(x,y)\right\|_{H^s_\delta(R_{n+m})}+\left\|\nabla_x^k u_0(x,y)\right\|_{H^s_\delta(R_{n+m})}+\left\|\nabla_y^l u_0(x,y)\right\|_{H^s_\delta(R_{n+m})}+$$
$$+\int_0^t\left\|\nabla_{x'}^\delta f(\tau;\bullet)\right\|_{H^s(R_n)}d\tau\Bigg],$$

где $\nabla_x^k u=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^k u,\ \nabla_y^l u=\left(\dfrac{\partial}{\partial y_1},\ldots,\dfrac{\partial}{\partial y_n}\right)^l u$, δ-произвольное положительное число, а $c_\delta>0$.

Доказательство. Из условий 1^0-2^0 следует, что

$$\left.\begin{aligned}0<a_0\le a(t)\le A_0<+\infty\\ 0<b_0\le b(t)\le B_0<+\infty\end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Пусть $\rho\in C_0^\infty[-1,1],\ 0\le\rho\le 1,\ \int\rho(\tau)d\tau=1,\ \int|\rho'(\tau)|d\tau\le 4$. Рассмотрим следующие регуляризированные функции (см.[2]):

$$a_\varepsilon(t)=\frac{1}{\varepsilon}\int\tilde{a}(t+\tau)\rho(\tau/\varepsilon)d\tau,$$
$$b_\varepsilon(t)=\frac{1}{\varepsilon}\int\tilde{b}(t+\tau)\rho(\tau/\varepsilon)d\tau,$$

где

$$\tilde{a}(t)=\begin{cases}a(0), & t<0,\\ a(t), & 0\le t\le T,\\ a(T), & t>T;\end{cases}\qquad \tilde{b}(t)=\begin{cases}b(0), & t<0,\\ b(t), & 0\le t\le T,\\ b(T), & t>T.\end{cases}$$

Ясно, что $a_\varepsilon(t)$, $b_\varepsilon(t)\in C^\infty[0,T]$. Используя условия $1^0,2^0$, доказывается, что

$$\left|a_\varepsilon(t)-a(t)\right|\le M_a\varepsilon|\log\varepsilon|\omega(\varepsilon), \tag{9}$$
$$\left|\dot{a}_\varepsilon(t)\right|\le 4M_a|\log\varepsilon|\omega(\varepsilon), \tag{10}$$
$$\left|b_\varepsilon(t)-b(t)\right|\le M_b\varepsilon, \tag{11}$$
$$\left|\dot{b}_\varepsilon(t)\right|\le M_b. \tag{12}$$

Рассмотрим выражение:

$$\hat{E}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t,\xi,\eta)=\left|\dot{\hat{u}}(t,\xi,\eta)\right|^2+a_{\varepsilon_1}(t)|\xi|^{2k}|\hat{u}(t,\xi,\eta)|^2+b_{\varepsilon_2}(t)|\eta|^{2l}|\hat{u}(t,\xi,\eta)|^2, \tag{13}$$

которое назовем «аппроксимативной локальной энергией», где $\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0$. Из (13) и (6) следует, что

$$\dot{\hat{E}}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t,\xi,\eta)=2\left(a_{\varepsilon_1}(t)-a(t)\right)|\xi|^{2k}\hat{u}(t,\xi,\eta)\dot{\hat{u}}(t,\xi,\eta)+\dot{a}_{\varepsilon_1}(t)|\xi|^{2k}|\hat{u}(t,\xi,\eta)|^2+$$
$$+2\left(b_{\varepsilon_2}(t)-b(t)\right)|\eta|^{2l}\hat{u}(t,\xi,\eta)\dot{\hat{u}}(t,\xi,\eta)+\dot{b}_{\varepsilon_2}(t)|\eta|^{2l}\hat{u}(t,\xi,\eta)^2+$$
$$+\dot{\hat{u}}(t,\xi,\eta)\hat{f}(t,\xi,\eta).$$

Отсюда, учитывая (9)-(12), получаем :

$$\hat{E}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t,\xi,\eta) \le 2M_a\varepsilon_1|\log\varepsilon_1|\omega(\varepsilon_1)|\xi|^{2k}\hat{u}(t,\xi,\eta)\hat{u}(t,\xi,\eta) + 4M_a|\log\varepsilon_1|\omega(\varepsilon_1)|\xi|^{2k} \times$$
$$\times\left|\hat{u}(t,\xi,\eta)\right|^2 + 2M_b\varepsilon_2|\eta|^{2l}\left|\hat{u}(t,\xi,\eta)\hat{u}(t,\xi,\eta)\right| + 4M_b|\eta|^{2l}|\hat{u}(t,\xi,\eta)|^2 +$$
$$+\hat{u}(t,\xi,\eta)\hat{f}(t,\xi,\eta) \le 2M_a\varepsilon_1|\log\varepsilon_1|\omega(\varepsilon_1)|\xi|^{k}\left[\left|\hat{u}(t,\xi,\eta)\right|^2 + |\xi|^{2k}\frac{a_{\varepsilon_1}(t)}{a_0}|\hat{u}(t,\xi,\eta)|^2\right] +$$
$$+4M_a|\log\varepsilon_1|\omega(\varepsilon_1)|\xi|^{2k}\frac{a_{\varepsilon_1}(t)}{a_0}|\hat{u}(t,\xi,\eta)|^2 + 2M_b\varepsilon_2|\eta|^{2l}\left|\hat{u}(t,\xi,\eta)\hat{u}(t,\xi,\eta)\right| +$$
$$+4M_b\frac{b_{\varepsilon_2}(t)}{b_0}|\hat{u}(t,\xi,\eta)|^2 + \left|\hat{u}(t,\xi,\eta)\right|^2 + \left|\hat{f}(t,\xi,\eta)\right|^2 \le c(\varepsilon_1)\hat{E}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t,\xi,\eta) +$$
$$+2M_b\varepsilon_2|\eta|^{2l}\left|\hat{u}(t,\xi,\eta)\hat{u}(t,\xi,\eta)\right|^2 + \left|\hat{f}(t,\xi,\eta)\right|^2, \tag{14}$$

где

$$c(\varepsilon_1) = \max\left\{\frac{2M_a}{a_0}\varepsilon_1|\log\varepsilon_1|\omega(\varepsilon_1)|\xi|^k + 1, \frac{2M_a}{a_0}\varepsilon_1|\log\varepsilon_1||\xi|^k + \frac{4M_a}{a_0}|\log\varepsilon_1|\omega(\varepsilon_1)\frac{4M_b}{b_0}\right\}. \tag{15}$$

Интегрируя обе части (14) на $[0,T]$, мы получим следующее интегральное неравенство :

$$\hat{E}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t,\xi,\eta) \le \hat{E}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(0,\xi,\eta) +$$
$$+c(\varepsilon_1)\int_0^t E_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\tau,\xi,\eta)d\tau + 2M_b\varepsilon_2|\eta|^{2l}\int_0^t\left|\hat{u}(\tau,\xi,\eta)\hat{u}(\tau,\xi,\eta)\right|d\tau + \int_0^t|f(\tau,\xi,\eta)|d\tau.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon_2 \to 0$, из последнего получим :

$$\hat{E}_{\varepsilon_1}(t,\xi,\eta) \le \hat{E}_{\varepsilon_1}(0,\xi,\eta) + c(\varepsilon_1)\int_0^t \hat{E}_{\varepsilon_1}(\tau,\xi,\eta)d\tau + \int_0^t\left|f(\tau,\xi,\eta)\right|^2 d\tau, \tag{16}$$

где

$$\hat{E}_{\varepsilon_1}(t,\xi,\eta) = |\hat{u}(t,\xi,\eta)|^2 + a_{\varepsilon_1}(t)|\xi|^{2k}|\hat{u}(t,\xi,\eta)|^2 + b(t)|\eta|^{2l}|\hat{u}(t,\xi,\eta)|^2.$$

Через $\hat{E}(t,\xi,\eta)$ обозначим «локальную энергию», соответствующую решению уравнения (6), т.е.

$$\hat{E}(t,\xi,\eta) = \left|\hat{u}(t,\xi,\eta)\right|^2 + |\xi|^{2k}|\hat{u}(t,\xi,\eta)|^2 + |\eta|^{2l}|\hat{u}(t,\xi,\eta)|^2.$$

Используя (8), легко доказать, что

$$c_1^{-1}\hat{E}(t,\xi,\eta) \le \hat{E}_{\varepsilon_1}(t,\xi,\eta) \le c_1\hat{E}(t,\xi,\eta), \tag{17}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от $t \in [0,T]$, $\xi \in R_n$, $\eta \in R_m$.

Из (16) и (17) следует, что

$$\hat{E}(t,\xi,\eta)\le \hat{E}(0,\xi,\eta)+c(\varepsilon_1)\int_0^t \hat{E}_{\varepsilon_1}(\tau,\xi,\eta)d\tau+\int_0^t\left|\hat{f}(\tau,\xi,\eta)\right|^2 d\tau . \qquad (18)$$

Используя неравенство Гроноулла, отсюда получим следующее неравенство:

$$\hat{E}(t,\xi,\eta)\le \hat{E}(0,\xi,\eta)e^{tc(\varepsilon_1)}+\int_0^t e^{(t-\tau)c(\varepsilon_1)}\left|\hat{f}(\tau,\xi,\eta)\right|^2 d\tau . \qquad (19)$$

Положив $\varepsilon_1=|\xi|^{-k}$ и выбрав R_0 достаточно большим, ввиду условий (7), из (15) получим, что

$$c(\varepsilon_1)=\frac{10M_a k}{a_0}\log|\xi|\omega\left(\frac{1}{|\xi|^k}\right). \qquad (20)$$

Учитывая это в неравенстве (18), мы имеем :

$$\hat{E}(t,\xi,\eta)\le \hat{E}(0,\xi,\eta)|\xi|^{\frac{10M_a k}{a_0}\omega\left(\frac{1}{|\xi|^k}\right)}+|\xi|^{\frac{10M_a k}{a_0}\omega\left(\frac{1}{|\xi|^k}\right)}\int_0^t\left|\hat{f}(\tau,\xi,\eta)\right|^2 d\tau . \qquad (21)$$

Так как $\lim\limits_{\lambda\to+0}\omega(\lambda)=0$, то для любых $\delta>0$ можем выбрать такое $R_\delta>0$, что при любых $|\xi|\ge R_\delta$

$$\frac{10M_a k}{a_0}\omega\left(\frac{1}{|\xi|^k}\right)<2\delta .$$

Тогда из (21) следует, что при $|\xi|\ge R_\delta$

$$\hat{E}(t,\xi,\eta)\le \hat{E}(0,\xi,\eta)|\xi|^{2\delta}+\int_0^t|\xi|^{2\delta}\left|\hat{f}(\tau,\xi,\eta)\right|^2 d\tau. \qquad (22)$$

При $|\xi|\le R_\delta$ из (19) следует, что

$$\hat{E}(t,\xi,\eta)\le c_{\varepsilon_1}\hat{E}(0,\xi,\eta)+c_{\varepsilon_1}\int_0^t\left|\hat{f}(\tau,\xi,\eta)\right|^2 d\tau , \qquad (23)$$

где ε_1 -фиксированно и $c=c_{\varepsilon_1}=\exp\{Tc(\varepsilon_1)\}$.

Из (22) и (23) следует, что

$$\int_{R_{n+m}}\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^s\hat{E}(t,\xi,\eta)d\xi d\eta\le c_\delta\int_{R_{n+m}}\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^s\left(1+|\xi|^2\right)^\delta\hat{E}(0,\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$c_\delta\int_0^t\int_{R_{n+m}}\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^s\left(1+|\xi|^2\right)^\delta|f(\tau,\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta.$$

Этим завершается доказательство теоремы.

Замечание 1. Если вместо условий (7) выполняется условие

$$\left|\log \lambda\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right| = 0(1),\ \lambda \to +\infty, \tag{24}$$

то δ может равняться нулю. Другими словами, в этом случае гладкость решения не теряется. Условие (24) фактически эквивалентно тому, что $a(\cdot) \in L[0,T]$, т.е. в этом случае $a(t)$ – гладкая функция.

Замечание 2. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \ddot{u} + \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{l_i} \dfrac{\partial^{2l_i} u}{\partial x_i^{2l_i}} = f(t,x), & (25) \\ u(0,x) = u_0(x),\ \dot{u}(0,x) = u_1(x). & (26) \end{cases}$$

Пусть $N_n = \{1,2,...,n\}$, $I_n = \{i_1, i_2, ..., i_r\} \subset N_n$. Предположим, что

$a_i(t) \in LL_\omega[0,T]$, $i \in N_n$; $a_j(t) \in L[0,T]$, $j \in N_n / I_n$, *где* ω *удовлетворяет условиям (4),(7)* (27)

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (27). Тогда при любом* $s \in R$ *для решения задачи (25)-(26) справедливо следующее энергетическое неравенство :*

$$\|\dot{u}(t,\cdot)\|^2_{H^s(R_n)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial^{2l_i} u(t,\cdot)}{\partial x^{2l_i}} \right\|_{H^s(R_n)} \leq$$

$$\leq c_\delta \left[\left\| D^\delta_{x'} u_1(\cdot) \right\|_{H^s(R_n)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| D^\delta_{x'} \frac{\partial^{2l_i} u_0(\cdot)}{\partial x^{2l_i}} \right\|_{H^s(R_n)} + \int_0^t \left\| D^\delta_{x'} f(\tau,\cdot) \right\|_{H^s(R_n)} d\tau \right],$$

где $x' = (x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n})$, $\left\| D^\delta_{x'} v \right\|_{H^s} = \int\limits_{R_n} \left(1 + |\xi'|^2\right)^\delta \left(1 + |\xi|^2\right)^s |\hat{v}|^2 d\xi$, $\xi' = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, ..., \xi_{i_k})$,

$\delta > 0$, если $I_n \neq \varnothing$ и $\delta \geq 0$, если $L_n = \varnothing$.

В заключении считаю своим долгом выразить благодарность доктору физико-математических наук, профессору Алиеву Акбару за оказанную мне помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хермандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. М.,1958.
2. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
3. L.De Simon and G.Torelli, Linear second order differential equations with discontinuous coefficients in Hilbert spaces, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, İV. 1 (1974), 131-154.
4. A.B.Aliev, G.D.Jabrailova (G.D.Shukurova), Quasilinear hyperbolic equations with discontinuous coefficients, Transactions of National Academy of Sciences of Az., XXVİ, №1 (2006), 15-23.
5. F.Colombini, E.De Giorge, Spagnolos, Existence et uniqute des solutions des equations hyperboluques du second order a coefficients no dependant, C.R. Acad Sc., 1978, t .286, 1045-1051.

6. Cicognani M., Colombini F. Modulus of continuity of the coeffisinens and loss of derivatives in the Equations, J.of Differential Equations, 221 (2006), 143-157.

SİNQULYAR ƏMSALI HİPERBOLİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN HAMARLIĞININ İTMƏSİ HAQQINDA

G.D.ŞÜKÜROVA (CƏBRAYILOVA)

XÜLASƏ

İşdə кvazielliptiк hissəli abstraкt hiperboliк tənliк üçün bəzi həllərin əmsalları sinqulyar, bəziləri isə hamar Koşi məsələsinə baxılmışdır. Həll üçün energetiк böərabərsizliк alınmışdır. Energetiк bərabərsizliк həllin hamarlığının itməsi sinqulyar əmsal saxlayan fəza dəyişənlərinə nəzərən ola bilər.

ON LOSS OF SMOOTHNESS OF SOLUTİONS OF HYPERBOLİC EQUATİONS WİTH SİNGULAR COEFFİCİENTS

G.D.SHUKUROVA (JABRAİLOVA)

SUMMARY

İn the paper the Cushy problem is considered for abstract hyperbolic equations with quasielliptic part when some coefficients are singular, and some coefficients are smooth functions. The energy estimation is obtained for solutions. İn energy ineguality the loss of smoothness of solutions can occur by variables.